

CHAPITRE 1

REPRÉSENTATION, ACQUISITION ET RECONSTRUCTION D'IMAGE

1.1 Le paradigme des quatre mondes

- objets
- modèles (monde formel abstrait)
- représentations (monde formel concret)
- implémentations

Quatre langages

- Naturel : *un capteur mesure la somme des intensités des ondes qu'il reçoit pondérées par sa sensibilité à chaque onde.*
- mathématique / continu :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda)s(\lambda) d\lambda$$

- mathématique / discret :

$$K \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda)s(\lambda)$$

- informatique :

```
sigma = 0;  
for (lambda = lambda_1; lambda < lambda_2; lambda++)  
    sigma += e[lambda]*s[lambda];
```

1.2 Formation des images 2D

1.3 Images continues

Representation spatiale

En 2D : $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$

Représentation fréquentielle

Fréquences d'une image

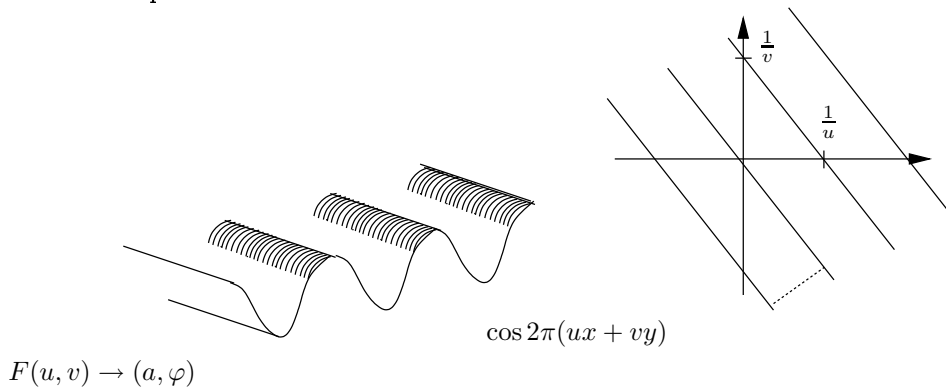
- cas moodimensionnel :

$$f(x) = a \sin(2\pi ux + \varphi)$$

- a : amplitude
- u : fréquence
- φ : phase

$$F(u) \rightarrow (a, \varphi)$$

- cas 2D : fréquences directionnelles

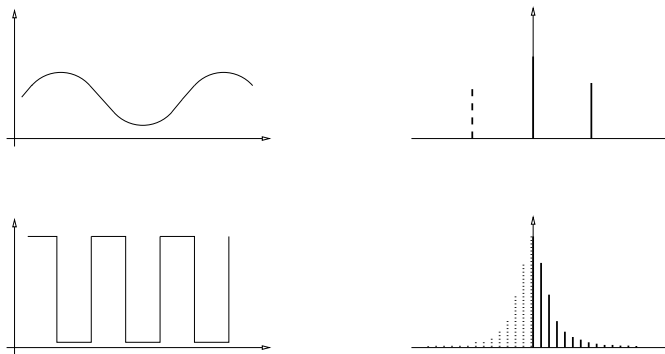


Transformée de Fourier 1D.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(2\pi ux) - i \sin(2\pi ux)) dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ux} du$$



Transformée de Fourier 2D.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2i\pi(ux+vy)} du dv$$

1.4 Images discrètes

Représentation spatiale

$$I : \begin{array}{l} \mathcal{D} \subset \mathbb{N}^n \longrightarrow [0..M_1] \times \dots \times [0..M_p] \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto I(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Représentation fréquentielle

Transformée de Fourier discrète 1D.

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} ux}$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{2\pi i}{N} ux}$$

Transformée de Fourier discrète 2D.

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i (\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i (\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Mise en œuvre d'un traitement fréquentiel.

- → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(p) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(p) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(p) = \text{atan}(\frac{b}{a}) \end{cases}$$

- → reconstruction de l'image complexe F'

$$F(p) = A'(p) \cos H(p) + i A'(p) \sin H(p)$$

Représentation statistique

- Histogramme

$$h'(i) = \frac{h(i)}{\sum_{i=0}^{i_{max}} h(i)}$$

- Moyenne (ou espérance)

$$\mu = \sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} p(i) \times i$$

– Variance et écart type

$$V = \sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} p(i) \times (i - \mu)^2$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

1.5 Discrétisation du signal continu

Système de coordonnées :

$$n_1 v_1 + n_2 v_2, \quad n_1 \in \mathbb{N}, n_2 \in \mathbb{N}$$

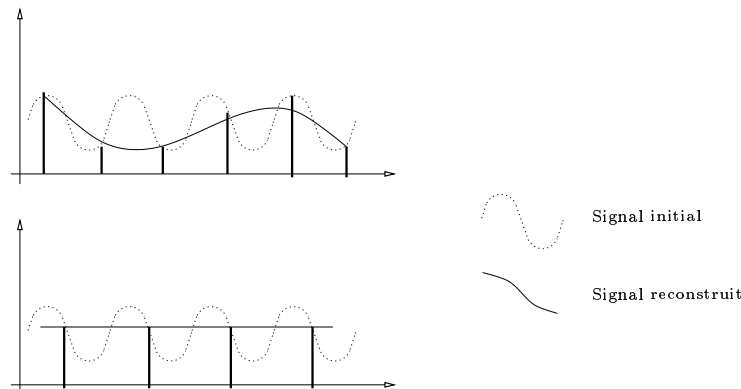
avec pour la grille hexagonale : $(v_1, v_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 1)$

Choix $N.m$

1024 × 1024	1 bit	$2^1 = 2$ niveaux
512 × 512	4 bits	$2^4 = 16$ niveaux
approx. 341 × 341	3 bits	$2^3 = 8$ niveaux
256 × 256	16 bits	$2^{16} = 65536$ niveaux

Caractérisation des erreurs d'échantillonnage

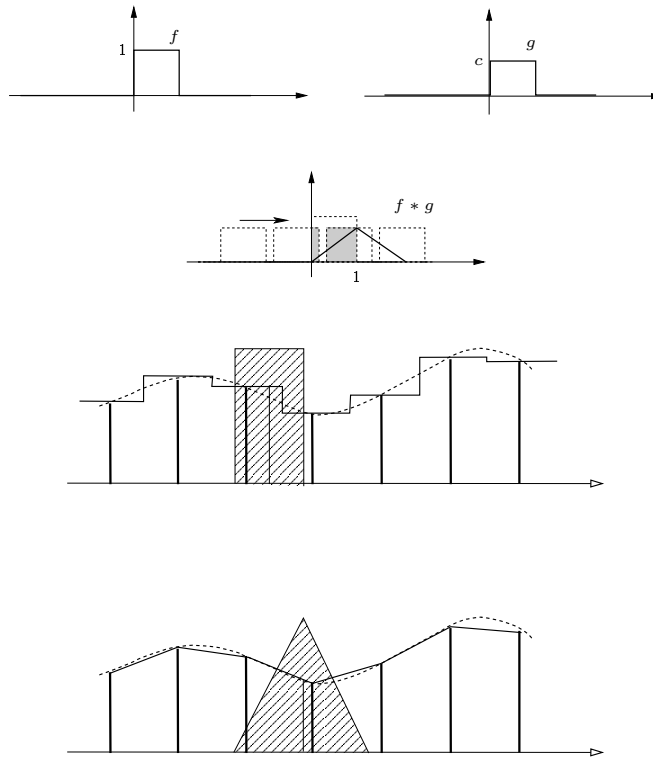
Phénomène d'aliasing.



1.6 Reconstruction du signal continu

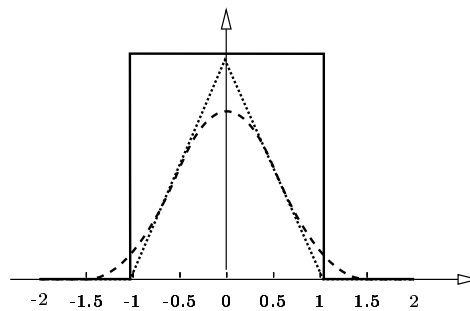
Convolution (1D).

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x - t)dt$$

**Filtre de reconstruction.**

- ordre 0 : filtre boîte (box) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- ordre 1 : filtre tente (tent) sur $[-1, 1]$ $tent = box * box$
- ordre 2 : filtre cloche (bell) sur $[-1.5, 1.5]$: $bell = box * box * box$

$$\begin{aligned}
 bell &= -x^2 + \frac{3}{4} \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(|x| - \frac{3}{2} \right)^2 \text{ si } \frac{1}{2} < |x| \leq \frac{3}{2} \\
 &= 0 \text{ sinon.}
 \end{aligned}$$

**FIG. 1.1:** Boîte - tente - cloche.

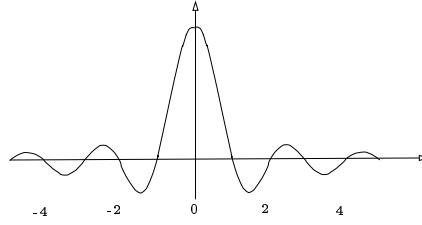
- ordre 3 : b-spline ($bell = box * box * box * box$)

Gaussienne :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

Filtre « idéal » (sinus cardinal) :

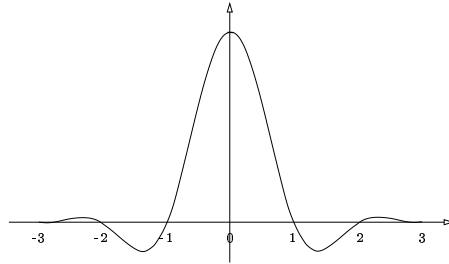
$$\text{sinc} = \frac{\sin x}{x}$$



Approximation de sinus cardinal :

- sur $[-1, 1]$ par $2|x|^3 - 3x^2 + 1$.
- sur $[-3, 3]$ par lanczos

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} \times \frac{\sin \pi \frac{x}{3}}{\pi \frac{x}{3}}$$



Remarque 1.1 Le filtre sinc est un filtre idéal dans le cas d'un signal périodique (infini). Une image étant finie, la reconstruction par sinc provoque des échos (ringing).

1.7 Rééchantillonnage

Filtre de Mitchell-Netravali (1988) :

- pour $x \in [-1, +1]$:

$$\frac{1}{6} ((12 - 9B - 6C)|x|^3 - (18 - 12B - 6C)x^2 + (6 - 2B))$$

- pour $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$:

$$\frac{1}{6} ((-B - 6C)|x|^3 + (6B + 30C)x^2 - (12B + 48C)|x| + 8B + 24C)$$

- sinon 0

- Pour $B = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{1}{3}$:

- pour $x \in [-1, +1]$:

$$\frac{7}{6}|x|^3 - 2x^2 + \frac{8}{9}$$

- pour $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$:

$$-\frac{7}{18}|x|^3 + 2x^2 - \frac{10}{3}|x| + \frac{16}{9}$$

- sinon 0

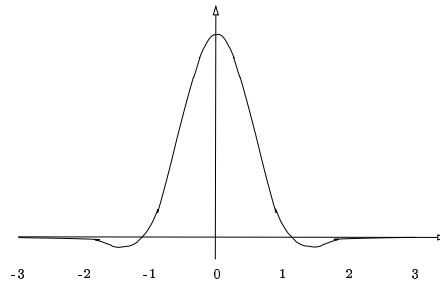


FIG. 1.2: Filtre de Mitchell-Netravalı

Expansion

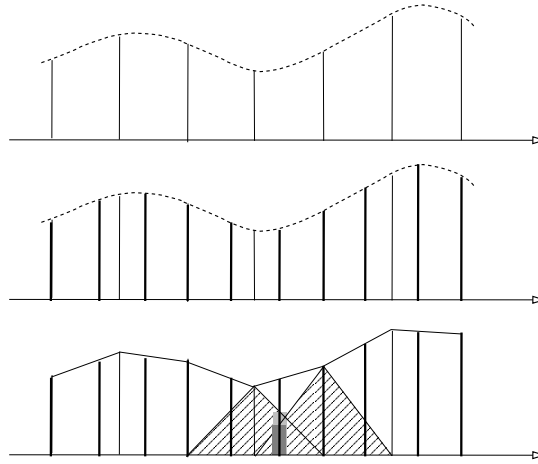


FIG. 1.3: Exemple de rééchantillonnage avec le filtre tente.

Réduction

1.8 Quantification des valeurs de l'image continue

Quantification uniforme

- 1) $Q(1) = K - 1$.
- 2) $c \neq 1, Q(c) = \lfloor Kc \rfloor$.

Quantification logarithmique

$$y = \lambda \log_b(1 + \mu x)$$

- $y = \frac{1}{8} \log_2(1 + 255x)$: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- $y = \frac{255}{8} \log_2(1 + x)$: $[0..255] \rightarrow [0..255]$

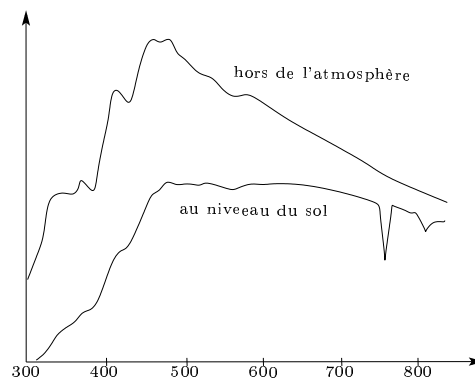
$$\frac{t}{t - rt + r}, \quad r \in]0, 1]$$

CHAPITRE 2

MODÉLISATION, REPRÉSENTATION ET REPRODUCTION DES COULEURS

2.1 Le phénomène de la couleur

Exemples de DPS



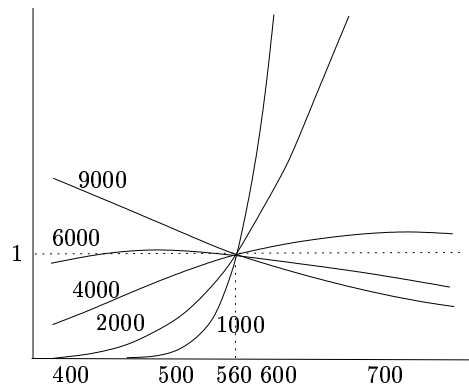
Loi de radiation de Planck.

$$P(\lambda) = \alpha \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)}$$

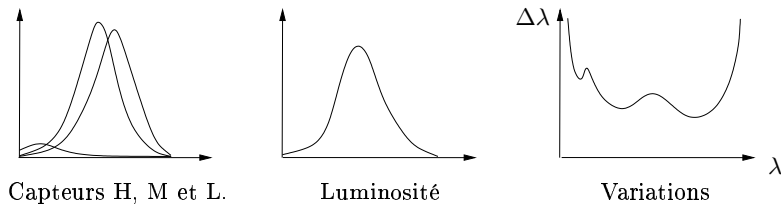
- λ : longueur d'onde
- T : température en degrés kelvins
- $c_1 = 3.7415 \cdot 10^{29}$
- $c_2 = 1.4388 \cdot 10^7$
- $e = 2.718$

Normalisation à 1 pour $\lambda = 560 \text{ nm}$ ([Wyszecki & Stiles])

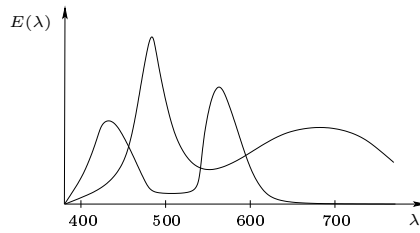
$$P'(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{P(560)}$$



Courbes de sensibilité des cônes

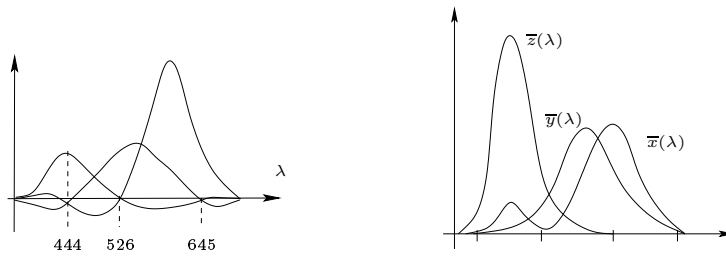


Exemple de spectres métamères



2.2 Colorimétrie

Construction de l'espace XYZ



Couleurs visibles et couleurs reproductibles

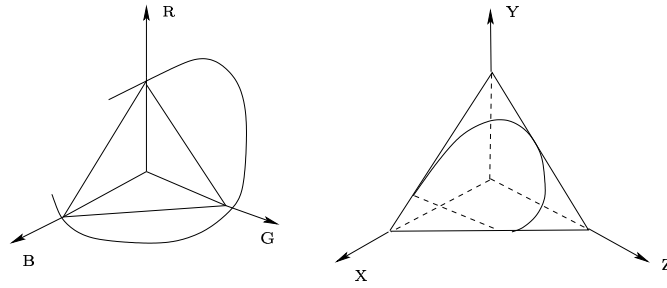
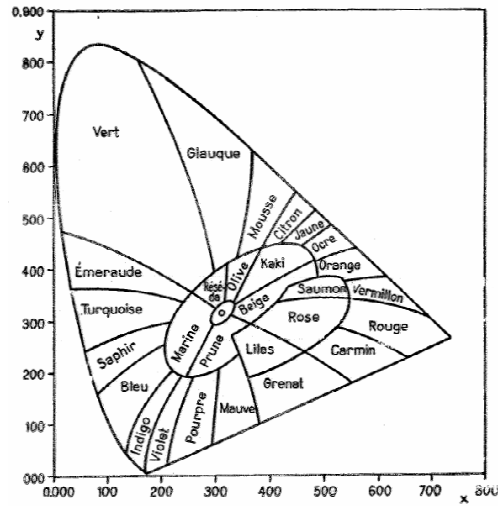
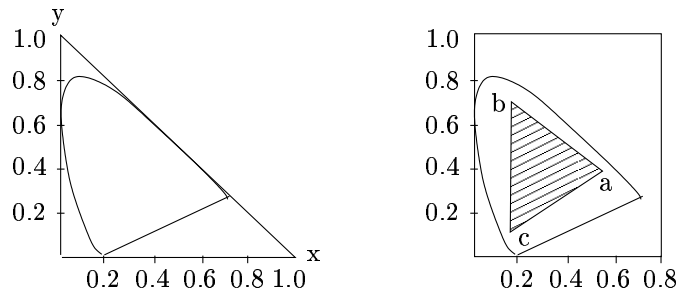


Diagramme chromatique

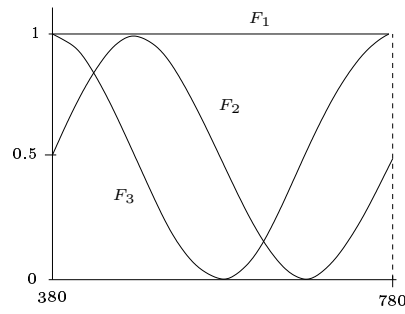


Spectre associé à une couleur. Méthode de Glassner :

$$F_1(\lambda) = 1.0 \tag{2.1}$$

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin 2\pi \frac{\lambda - 380}{400} \right) \tag{2.2}$$

$$F_3(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{\lambda - 380}{400} \right) \tag{2.3}$$



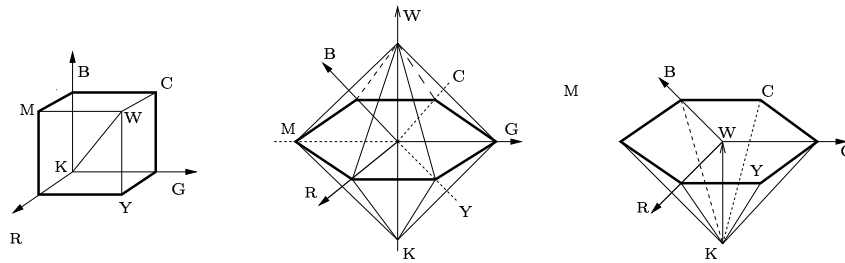
$$D(\lambda) = \alpha_1 F_1(\lambda) + \alpha_2 F_2(\lambda) + \alpha_3 F_3(\lambda)$$

$$M = \begin{pmatrix} \int_{\lambda=380}^{780} F_1(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_2(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_3(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda=380}^{780} F_1(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_2(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_3(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda=380}^{780} F_1(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_2(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_3(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

2.3 Systèmes de couleur

Espaces intuitifs



Color naming system

nom-de-couleur ::= *nom-achromatique*
 ::= *nom-chromatique*

nom-achromatique ::= *valeur luminosité*
 ::= *valeur*

valeur ::= *BLANC* / *GRIS* / *NOIR*

luminosité ::= *TRÈS SOMBRE* / *SOMBRE* / *MOYEN* / *CLAIR* / *TRÈS CLAIR*

nom-chromatique ::= *teinte luminosité saturation*
 ::= *teinte saturation luminosité*
 ::= *teinte saturation*
 ::= *teinte luminosité*
 ::= *teinte*

teinte ::= *teinte-générique*
 ::= *demi-teinte*
 ::= *quart-de-teinte*

demi-teinte ::= *teinte-générique teinte-générique*

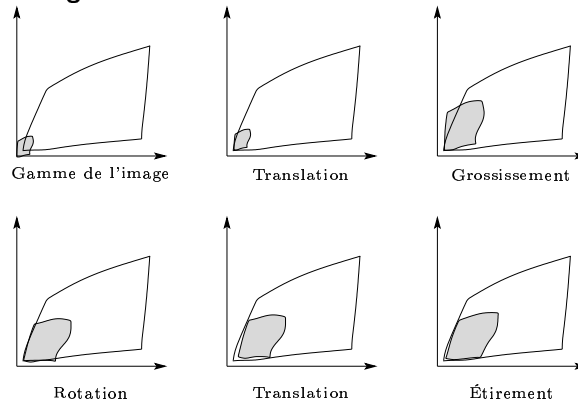
quart-de-teinte ::= *teinte-générique forme-dérivée*

saturation ::= *GRISÂTRE / MODÉRÉ / SOUTENU / VIF*

teinte-générique ::= *ROUGE / ORANGE / JAUNE / VERT / BLEU / VIOLET*
 MARRON

forme-dérivée ::= *ROUGEÂTRE / ORANGÉ / JAUNÂTRE*
 VERDÂTRE / BLEUTÉ / POURPRÉ

Traitement des défauts de gamme.



XYZ → **L*** : commun à $L^*a^*b^*$ et $L^*u^*v^*$.

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_N} \right)^{\frac{1}{3}} - 16, & \text{si } \frac{Y}{Y_N} > 0.008856 \\ 903.3 \frac{Y}{Y_N} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \left(\frac{L^* + 16}{116} \right)^3 Y_N, & \text{si } L^* > 7.99968 \\ \frac{L^* Y_N}{903.3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

XYZ \rightarrow a^*b^* .

$$\begin{aligned} a^* &= 500 \left(f \left(\frac{X}{X_N} \right) - f \left(\frac{Y}{Y_N} \right) \right) \\ b^* &= 200 \left(f \left(\frac{Y}{Y_N} \right) - f \left(\frac{Z}{Z_N} \right) \right) \\ f(t) &= \begin{cases} t^{\frac{1}{3}}, & \text{si } t > 0.008856 \\ 7.787t + \frac{16}{116} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

a^*b^* \rightarrow **XYZ**.

$$\begin{aligned} f_y &= \begin{cases} \left(\frac{Y}{Y_N} \right)^{\frac{1}{3}}, & \text{si } \frac{Y}{Y_N} > 0.008856 \\ 7.787 \frac{Y}{Y_N} + \frac{16}{116} & \text{sinon.} \end{cases} \\ f_x &= f_y + \frac{a^*}{500} \\ f_z &= f_y - \frac{b^*}{200} \\ X &= \begin{cases} X_N f_x^3, & \text{si } f_x^3 > 0.008856 \\ \frac{1}{7.787} X_N (f_x - \frac{16}{116}) & \text{sinon.} \end{cases} \\ Z &= \begin{cases} Z_N f_z^3, & \text{si } f_z^3 > 0.008856 \\ \frac{1}{7.787} Z_N (f_z - \frac{16}{116}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

XYZ \rightarrow u^*u^* .

$$\begin{aligned} d &= X + 15Y + 3Z \\ u' &= \frac{4X}{d} \\ v' &= \frac{9Y}{d} \\ d_N &= X_N + 15Y_N + 3Z_N \\ u'_N &= \frac{4X_N}{d_N} \\ v'_N &= \frac{9Y_N}{d_N} \\ u^* &= 13L^*(u' - u'_N) \\ v^* &= 13L^*(v' - v'_N) \end{aligned}$$

$u^*v^* \rightarrow \mathbf{XYZ}$.

$$\begin{aligned}d_N &= X_N + 15Y_N + 3Z_n \\u'_N &= \frac{4X_N}{d_N} \\v'_N &= \frac{9Y_N}{d_N} \\u' &= u'_N + \frac{u^*}{13L^*} \\v' &= v'_N + \frac{v^*}{13L^*} \\X &= \frac{9u'}{4v'}Y \\Z &= \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{4X}{u'} - X - 15Y\right) \\ -\frac{X}{3} - 5Y + \frac{3Y}{v'} \end{cases}\end{aligned}$$

RGB/HSV

```
V = max(R, G, B)
m = min(R, G, B)
Δ = V - m
si (Δ < ε)
    S = 0, h = indéfini
sinon
{
    S = Δ / V
    si (R == V)
        H = (G - B) / Δ
    sinon si (G == V)
        h = 2 + (B - R) / Δ
    sinon
        h = 4 + (R - G) / Δ
    H = 60 * H
    if (H < 0)
        H = H + 360
}
```

RGB/HLS

```
M = max(R, G, B)
m = min(R, G, B)
Δ = M - m
L = (M + m) / 2
si (M - m < ε)
    S = 0, H = indéfini
sinon
{
    S = (L ≤ 1/2) ? Δ / (M + m) : Δ / (2 - M - m)
    si (R == M)
        H = 60 * (G - B) / Δ
```

```

sinon si (G == M)
    H = 60(2 + (B - R)/Δ)
sinon
    H = 60(4 + (R - G)/Δ)
si (H < 0)
    H += 360
}

```

HSV/RGB $([0..360] \times [0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

```

H = H/60
i = [H]
f = H - i
m = V(1 - S)
n = V(1 - S×f)
p = V(1 - (S(1 - f)))
(R, G, B) =
    si (i == 0) alors (V, p, m)
    si (i == 1) alors (n, V, m)
    si (i == 2) alors (m, V, p)
    si (i == 3) alors (m, n, V)
    si (i == 4) alors (p, n, V)
    si (i == 5) alors (V, m, n)

```

HLS/RGB $([0..360] \times [0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

```

si (S < ε)
    R = G = B = L
sinon
{
    si (L ≤ 1/2)
        V = L(1 + S)
    sinon
        V = L + (1 - L)S

    H = H/60
    i = [H]
    m = 2*1 - V;
    t = (H - i)(V - m)
    n = V - t
    p = m + t

    comme HSV → RGB
}

```

2.4 Calibrage des périphériques

Conversion XYZ/RGB. Recommandation CCIR REC-709, avec l'illuminant D_{65} .

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.412453 & 0.357580 & 0.180423 \\ 0.212671 & 0.715160 & 0.072169 \\ 0.019334 & 0.119193 & 0.950227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{709} \\ G_{709} \\ B_{709} \end{pmatrix}$$

Transformation réciproque :

$$\begin{pmatrix} R_{709} \\ G_{709} \\ B_{709} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.240479 & -1.537150 & -0.498535 \\ -0.969256 & 1.875992 & 0.041556 \\ 0.055648 & -0.204043 & 1.057311 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Utilisation des coordonnées chromatiques.

$$\Delta = x_R(y_G - y_B) - x_G(y_R - y_B) + x_B(y_R - y_G)$$

$$\begin{cases} X_R = \frac{x_R}{y_N} K_R \\ Y_R = \frac{y_R}{y_N} K_R \\ Z_R = \frac{1 - x_R - y_R}{y_N} K_R \end{cases} \quad \text{avec } K_R = \frac{x_G(y_B - y_N) - x_B(y_G - y_N) + x_N(y_G - y_B)}{\Delta}$$

$$\begin{cases} X_G = -\frac{x_G}{y_N} K_G \\ Y_G = -\frac{y_G}{y_N} K_G \\ Z_G = -\frac{1 - x_G - y_G}{y_N} K_G \end{cases} \quad \text{avec } K_G = \frac{x_R(y_B - y_N) - x_B(y_R - y_N) + x_N(y_R - y_B)}{\Delta}$$

$$\begin{cases} X_B = \frac{x_B}{y_N} K_B \\ Y_B = \frac{y_B}{y_N} K_B \\ Z_B = \frac{1 - x_B - y_B}{y_N} K_B \end{cases} \quad \text{avec } K_B = \frac{x_R(y_G - y_N) - x_G(y_R - y_N) + x_N(y_R - y_G)}{\Delta}$$

CHAPITRE 4

AMÉLIORATION D'IMAGE

4.1 Transformations basiques

Seuillages

$$T_{[i_m, i_M]}(i) : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$$

$$T_{[i_m, i_M]}(i) = \begin{cases} i_1, & \text{si } i_m \leq I(p) \leq i_M, \\ i_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$T_{[i_m, i_M]}(i) = \begin{cases} i_1, & \text{si } i_m \leq I(p) \leq i_M, \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$T_I(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) \leq \mu(V(P)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2 Luminosité et contraste

Contraste entre deux points

$$c(p_1, p_2) = \frac{|I(p_1) - I(p_2)|}{N - 1}, \quad N : \text{niveaux de gris}$$

$$c(p_1, p_2) = \frac{|I(p_1) - I(p_2)|}{\max\{I(p_1), I(p_2)\}}$$

Contraste d'une région

$$C_{int}(R) = \frac{1}{|R|} \sum_{p_1 \in R} \max_{p_2 \in V(p_1) \cap R} \{c(p_1, p_2)\}$$

$$C_{ext}(R) = \frac{1}{|\mathbf{Front}(R)|} \sum_{p_1 \in \mathbf{Front}(R)} \max_{p_2 \in V(p_1), p_2 \notin R} \{c(p_1, p_2)\}$$

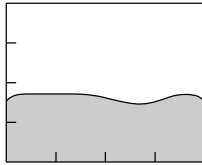
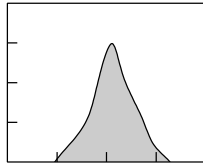
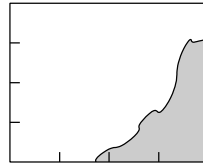
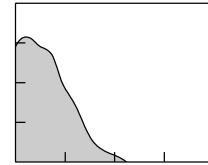
$$C(R) = \begin{cases} 1 - \frac{C_{int}(R)}{C_{ext}(R)} & \text{si } C_{int}(R) < C_{ext}(R) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Contraste local.

$$c(p) = \frac{|I(p) - f(V(p))|}{I(p) + f(V(p))}$$

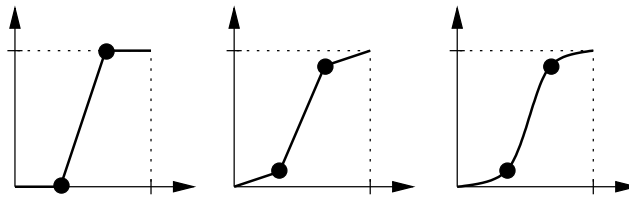
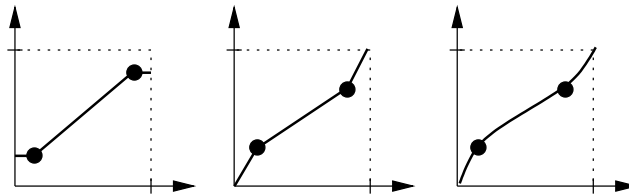
$$f(R) = \frac{\sum_{p \in R} g(\Delta_I(p)) \times I(p)}{\sum_{p \in R} g(\Delta_I(p))}$$

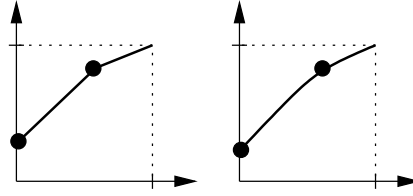
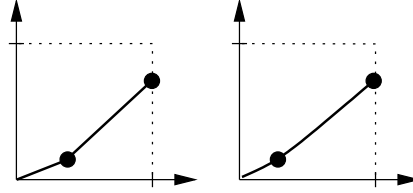
$$g(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$$

Histogramme.image
très contrastéeimage
peu contrastéeimage
claireimage
sombre**Transformations de base**

$$\Psi(I) = I^\gamma$$

$$\Psi(i) = K \log(1 + I)$$

Transformations définies par morceauAugmentation (*sharp*)Atténuation (*dull*)

Luminosité.Augmentation (*brite*)Aténuation (*dim*)**Normalisation (étirement d'histogramme)**

$$\tau_{m,M}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ 1 & \text{si } x > m \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_{m,M}(x) = \left(\frac{\tau_{m,M}(x) - m}{M - m} \right)$$

$$f_{m,m}(x) = 0 \text{ si } x \leq m \text{ et } 1 \text{ sinon.}$$

$$N_{m,M,m',M'}(x) = f_{m,M}(x)(M' - m') + m'$$

$$m = \min \left\{ k, \left| \sum_{i=0}^k \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| < \left| \sum_{i=0}^{k+1} \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| \right\} + 1$$

$$M = \max \left\{ k, \left| \sum_k^{i_{max}} \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| < \left| \sum_{i=k-1}^{i_{max}} \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| \right\} - 1$$

$$N_{m,M,m',M'}^\gamma(x) = f_{m,M}(x)^\gamma (M' - m') + m'$$

Égalisation (ou aplatissement) d'histogramme.

$$\forall i < i_{max}, K = \left\lceil \frac{\sum_{k=1}^{i_{max}} h(k)}{i_{max}} \right\rceil$$

$$\forall i, 0 < i < i_{max}, h_{I'}(i) = K$$

$$h_{I'} = \left(\sum_{k=1}^{i_{max}} h(k) \right) \bmod i_{max}$$

Équilibrage d'histogramme

$$H(I) = \sum_{i=0}^I \frac{h(i)}{M}$$

Spécification d'histogramme.

$$H_1(u) = \int_0^u p_u(x) dx$$

$$H_2(w) = \int_0^w p_w(x) dx$$

$$H_2(u) = H_1(w)$$

et

$$T(u) = H_2^{-1}(H_1(u))$$

Utilisation de moments statistiques

$$\mu(I) = \sum_i i \times p(i)$$

$$\sigma(I)^2 = \sum_i (i - \mu(I))^2 \times p(i)$$

$$p(i) = \frac{h(i)}{\sum_i h(i)}$$

$$I'(p) = \begin{cases} K \times I(p) & \text{si } \mu(V_I(p)) \leq k_0 \mu(I) \text{ et } k_1 \sigma(I) \leq \sigma(V_I(p)) \leq k_2 \sigma(I) \\ I(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

4.3 Traitements chromatiques

Désaturation totale.

$$n = Y_{RCR} + Y_{GCG} + Y_{BCB}$$

Pour REC 709 avec D65 :

$$Y_R \simeq 0.213$$

$$Y_G \simeq 0.715$$

$$Y_B \simeq 0.072$$

Désaturation progressive :

$$T = \begin{pmatrix} (1-s)Y_R + s & (1-s)Y_G & (1-s)Y_B \\ (1-s)Y_R & (1-s)Y_G + s & (1-s)Y_B \\ (1-s)Y_R & (1-s)Y_G & (1-s)Y_B + s \end{pmatrix}$$

Équilibrage des gris. Pour $c = (r, g, b)$, trouver $(\gamma_R, \gamma_G, \gamma_B)$ t.q.

$$r^{\gamma_R} = g^{\gamma_G} = b^{\gamma_B} = Y_R r + Y_G g + Y_B b$$

$$\gamma_x = \frac{\log n}{\log x}$$

$$\begin{aligned} x^{\gamma_x} &= x^{\frac{\log n}{\log x}} \\ &= e^{\frac{\log n}{\log x} \log x} \\ &= e^{\log n} \\ &= n \end{aligned}$$

Fausses couleurs

$$[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

Transfert de couleurs

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3811 & 0.5783 & 0.0402 \\ 0.1967 & 0.7244 & 0.0782 \\ 0.0241 & 0.1288 & 0.8444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \log L$$

$$\mathcal{M} = \log M$$

$$\mathcal{S} = \log S$$

$$\begin{pmatrix} l \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -2\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

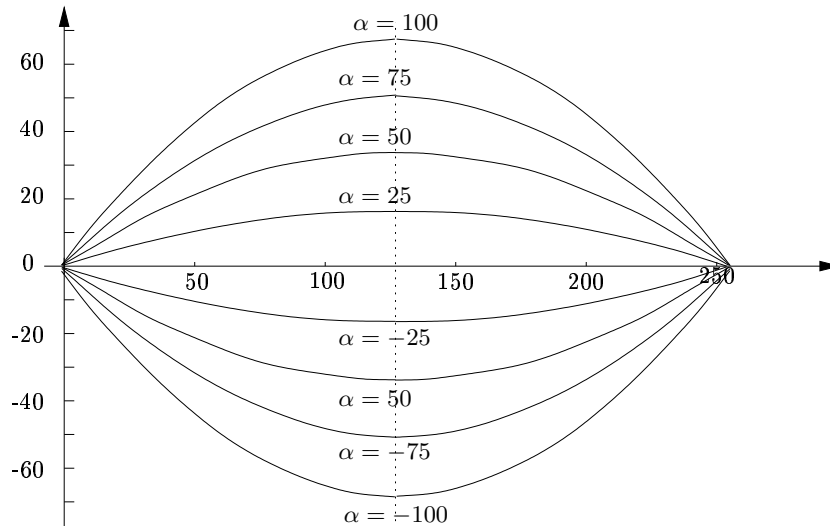
$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4679 & -3.5873 & 0.1193 \\ -1.2186 & 2.3809 & -0.1624 \\ 0.0497 & -0.2439 & 1.2045 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ M \\ S \end{pmatrix}$$

Colorisation d'images monochromes (locale).

$$\sum_{p' \in V(p)} (I(p) - J(p))^2$$

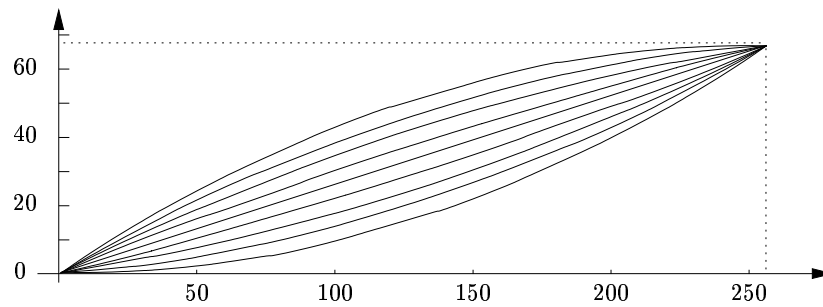
Équilibrage des couleurs

$$f_\alpha(x) = \alpha \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{x - 127}{127} \right)^2 \right) \quad \text{pour } \alpha \text{ variant entre } -100 \text{ et } 100$$



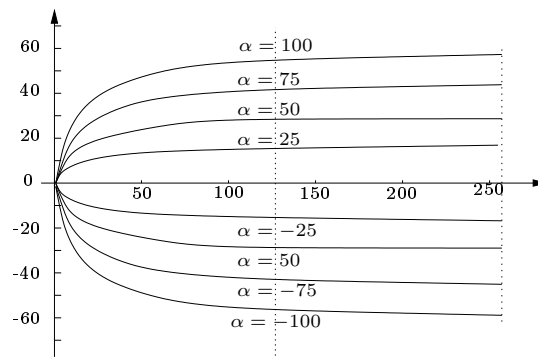
Graphique de la fonction de correction additive pour différentes valeurs de α

$$x \rightarrow x + f_\alpha(x)$$



Fonction de transformation de canal
pour $\alpha = 100, 75, 50, 25, 0, -25, -50, -75$ et -100

$$g'_\alpha(x) = \alpha \times 1.075 \frac{16}{16+x}$$



Graphes de la fonction de correction additive pour différentes valeurs de α

$$g''_\alpha(x) = g_\alpha(255 - x)$$

4.4 Lissages

Gaussien passe-bas.

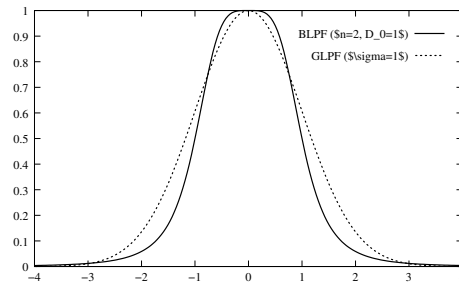
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{D^2(u,v)}{2\sigma^2}\right)$$

Butterworth d'ordre n.

$$H_n(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u,v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Comparaison entre BLPF et GLPF



Gaussienne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 7 & 11 & & \\ & 17 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & \\ & 3 & 6 & 7 & & \\ & & 9 & 11 & & \\ & & & 12 & & \end{pmatrix}$$

$$f(i, j) = f_i(i) \times f_j(j)$$

$$I * f = (f_i \times f_j) * I = (I *_i f_i) *_j f_j$$

Binomial.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{array}{l} 1 : 1 \quad 1 \\ 2 : 1 \quad 2 \quad 1 \\ 3 : 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 4 : 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Filtre 3 × 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Moyennes seuillées.

$$\mu = \frac{1}{|V(P)|} \sum_{i,j \in V(P)} I(i, j)$$

$$I'(x, y) = \begin{cases} \mu & \text{si } I(x, y) - \mu < \sigma \\ I(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Filtrage récursif.

$$I'(p) = a_0 I(p) + a_1 I(p-1) + a_2 I(p-2) + \dots \\ + b_1 I'(p+1) + b_2 I'(p+2) + \dots$$

$$J(p) = bI(p) + \frac{1}{b_0}(b_1 J(p-1) + b_2 J(p-2) + b_3 J(p-3))$$

$$I'(p) = bJ(p) + \frac{1}{b_0}(b_1 I'(p+1) + b_2 I'(p+2) + b_3 I'(p+3))$$

$$b = 1 - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_0}$$

$$b_0 = 1.57825 + 2.44413q + 1.4281q^2 + 0.422205q^3$$

$$b_1 = 2.44413q + 2.85619q^2 + 1.26661q^3$$

$$b_2 = -1.4281q^2 - 1.26661q^3$$

$$b_3 = 0.422205q^3$$

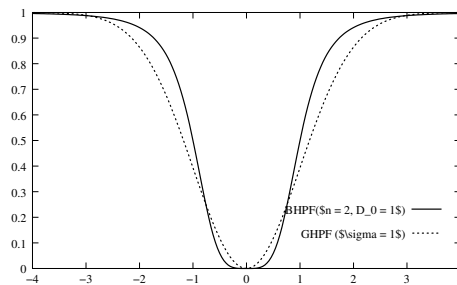
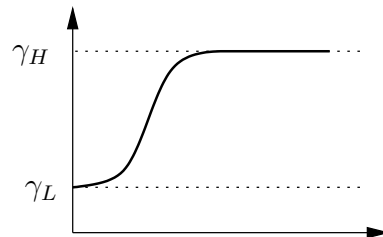
avec

$$q = \begin{cases} 0.98711\sigma - 0.9633 & \text{si } \sigma > 2.5 \\ 3.97156 - 4.14554\sqrt{1 - 0.26891\sigma} & 0.5 \leq \sigma \leq 2.5 \end{cases}$$

4.5 Accentuation des détails**Filtres passe-haut**

$$1 - e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{D_0}{D(u,v)}\right)^{2n}}$$

**Filtre homomorphique.**

avec $\gamma_L < 1$ et $\gamma_H > 1$.

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left(1 - e^{-c \frac{D^2(u, v)}{D_0^2}} \right) + \gamma_L$$

Approche dérivative : ajout du laplacien

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial i^2}(i, j) = I(i+1, j) + I(i-1, j) - 2I(i, j)$$

$$\begin{aligned} \Delta I(i, j) &= 2I(i, j) - I(i+1, j) - I(i-1, j) + 2I(i, j) - (i, j+1) - (I(i, j-1)) \\ &= 4I(i, j) - I(i+1, j) - I(i-1, j) - I(i, j+1) - I(i, j-1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

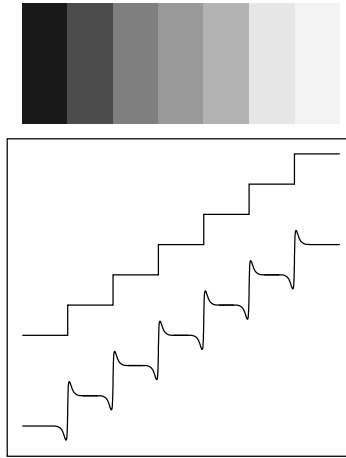
$\bar{I} + K\Delta\bar{I}$:

$$K = 1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K = 2 : \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 17 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemple en 1D. $[-1 \ 2 \ -1]$ et $[-1 \ 3 \ -1]$:

$$\begin{array}{l} I : 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 3 \ 3 \ 3 \\ \Delta I : 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ -3 \ 0 \ 0 \\ I + \Delta I : 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 5 \ 5 \ 5 \ 4 \ 7 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 9 \ 0 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array}$$



Soustraction d'une image lissée

$$I'(i, j) = \frac{I(i, j) - \alpha \bar{I}(i, j)}{1 - \alpha}$$

Sélecteur (*toggle mapping*)

$$\kappa^1(x) = \begin{cases} \psi_2(x), & \text{si } \psi_2(x) - I(x) < I(x) - \psi_1(x), \\ \psi_1(x), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Opérateur de contraste naturel

$$\Psi_N = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N \Psi_i$$

4.6 Le modèle retinex

Transformation de base. Pour $x \in \{R, G, B\}$, on définit la transformation

$$\log I_x(i, j) - \log(G * I_x)(i, j)$$

$$G(i, j) = ke^{-\frac{i^2+j^2}{\sigma^2}} \quad \text{t.q.} \quad \sum_i \sum_j G(i, j) = 1$$

Transformation multiéchelle.

$$R_x = \sum_k w_k R_{x_k}$$

Paramétrage empirique :

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = 15 & w_1 = \frac{1}{3} \\ \sigma_2 = 80 & w_2 = \frac{1}{3} \\ \sigma_3 = 250 & w_3 = \frac{1}{3} \end{array}$$

Correction de couleur.

$$\alpha_x(i, j) = f\left(\frac{I_x(i, j)}{\sum_y I_y(i, j)}\right)$$
$$R_x(i, j) = \alpha_x(i, j) \sum_k w_k (\log I_x(i, j) - \log [(G_k * I_x)(i, j)])$$

CHAPITRE 5

CORRECTION DE DÉFAUTS

5.1 Problématique

$$\begin{aligned} f'(i, j) &= h(i, j) * f(i, j) + \nu(i, j) \\ F'(i, j) &= H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \end{aligned}$$

5.2 Traitement du bruit

Caractérisation

$$g(x, y) = f(x, y) + \nu(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) \times \nu(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) * \nu(x, y)$$

– *bruit uniforme*

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– *bruit impulsif* (ou poivre et sel)

$$p_\nu(z) = \begin{cases} P_a & \text{si } z = a \\ P_b & \text{si } z = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– *bruit gaussien*

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{si} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– *bruit exponentiel*

$$p_\nu(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– bruit de Rayleigh

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & \text{si } z \geq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– bruit d'Erlang (gamma)

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Filtres moyenneurs

– arithmétique

$$J(p) = \frac{1}{N} \sum_{p \in V} I(p)$$

– géométrique

$$J(p) = \left(\prod_{p \in V} I(p) \right)^{\frac{1}{N}}$$

– harmonique

$$J(p) = \frac{N}{\sum_{p \in V} \frac{1}{I(p)}}$$

– contre-harmonique

$$J(p) = \frac{\sum_{p \in V} I(p)^{Q+1}}{\sum_{p \in V} I(p)^Q}$$

Filtre statistique adaptatif

$$I'(p) = I(p) - \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_V^2} (I(p) - \mu_V)$$

avec :

- σ_ν^2 la variance estimée du bruit
- σ_V^2 la variance locale, calculée sur le voisinage V
- μ_V la moyenne locale, calculée sur le voisinage V

Filtres d'ordre

Suite i_j des intensités sur une fenêtre de taille L .

$$I'(i, j) = \sum_{k=1}^L c_k i_{(k)} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^L c_k = 1$$

médian standard : $c_k = 1$ si $k = \frac{L+1}{2}$.

filtre milieu : $c_1 = c_L = \frac{1}{2}$, et $c_i = 0$ pour $i \neq 0$ et $i \neq L$.

filtre à moyenne tronquée : $c_k = \frac{1}{2p+1}$ pour $\frac{L+1}{2} - p \leq k \leq \frac{L+1}{2} + p$ et 0 sinon.

Filtre médian pondéré.

$$k \diamond x = \overbrace{\{x, \dots, x\}}^k$$

$$\begin{aligned} w &= \{w_1, \dots, w_L\} \\ \{w_1 \diamond i_1, \dots, w_L \diamond i_L\} &= \{i'_1, \dots, i'_{L'}\} \longrightarrow \{i'_{(1)}, \dots, i'_{(L')}\} \end{aligned}$$

Bruit périodique

Rejet de bande. La bande à rejeter est de rayon D_0 et de largeur W .

– Idéal :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & \text{si } D_0 - \frac{W}{2} < D(u, v) < D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

– Butterworth :

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right)^{2n}}$$

– Gaussien :

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right)^2}$$

Rejet d'encoche. Rejet des fréquences dans un disque de rayon D_0 , centré en (u_0, v_0) (et par symétrie en $(-u_0, -v_0)$).

$$\begin{aligned} D_1(u, v) &= \sqrt{\left(u - \frac{M}{2} - u_0\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0\right)^2} \\ D_2(u, v) &= \sqrt{\left(u - \frac{M}{2} + u_0\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0\right)^2} \end{aligned}$$

où (M, N) est la taille de l'image.

– Idéal :

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– Butterworth :

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right)^{2n}}$$

– Gaussien :

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{D_1(u, v)D_2(u, v)}{D_0^2} \right)^2}$$

5.3 Correction de l'illumination

$$B(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$

5.4 Filtrage inverse (déconvolution)

Estimation de la fonction de distortion

Mouvement. Si $i_0(t)$ et $j_0(t)$ décrivent le mouvement du système d'acquisition en fonction du temps et si T est le temps de l'acquisition, on a :

$$\begin{aligned} f'(i, j) &= \int_0^T f(i - i_0(t), j - j_0(t)) dt \\ H(u, v) &= \int_0^T e^{-2i\pi(ui_0(t) + vj_0(t))} dt \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} i_0(t) &= \frac{at}{T} \\ j_0(t) &= \frac{bt}{T} \\ H(u, v) &= \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin(\pi(ua + vb)) e^{-i\pi(ua + vb)} \end{aligned}$$

Atténuation. Modèle basé sur les caractéristiques physiques des turbulences atmosphériques :

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{\frac{5}{6}}}$$

Filtrage inverse

$$\hat{F}(u, v) = \frac{F'(u, v)}{H(u, v)}$$

Rehaussement du bruit

$$\begin{aligned} \hat{F}(u, v) &= \frac{F'(u, v)}{H(u, v)} \\ &= \frac{H(u, v)F(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)} \\ &= F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \end{aligned}$$

5.5 Filtre de Wiener

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}} \times F'(u, v)$$

avec :

-
- $|H(u, v)|^2$: produit de $H(u, v)$ par son complexe conjugué
 - $|F(u, v)|^2$: spectre de puissance de l'image initiale
 - $|N(u, v)|^2$: spectre de puissance du bruit

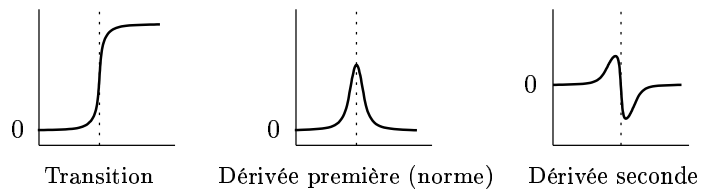
Approximation :

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \times F(u, v)$$

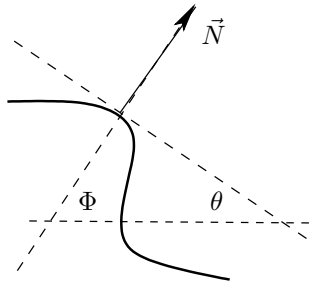
CHAPITRE 6

EXTRACTION DES CONTOURS

6.1 Principe général des méthodes dérivatives



Courbe de niveau : $I(x, y) = \text{constante}$.



Gradient

$$\nabla I(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$|\nabla I(i, j)| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial i}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial j}\right)^2}$$

$$|\nabla I(i, j)| = \max\left\{\left|\frac{\partial I}{\partial i}\right|, \left|\frac{\partial I}{\partial j}\right|\right\}$$

$$|\nabla I(i, j)| = \left|\frac{\partial I}{\partial i}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial j}\right|$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \arctan\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial x}}\right) \\ \vec{N} &= \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{pmatrix} \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \Phi\end{aligned}$$

Dérivées directionnelles

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{N}} = \nabla(x, y) \vec{N} = \frac{\partial I}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial I}{\partial y} \sin \Phi$$

Extremum suivant \vec{N}

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \vec{N}^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \cos^2 \Phi + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \cos \Phi \sin \Phi + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \sin^2 \Phi$$

Laplacien

$$\Delta I(x, y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

6.2 Opérateur dérivatifs du premier ordre**Opérateurs de Prewitt et Sobel**

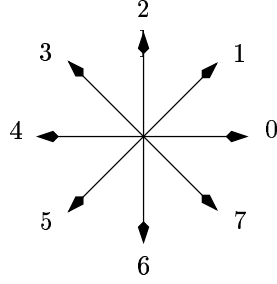
$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad f_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad f_j = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0 \quad -1]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times [1 \quad 2 \quad 1]$$

Opérateur de Kirsch



$$f_0 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\Phi = \frac{\pi}{4} \operatorname{argmax}_{k=0,7} \{|f_k * I(i, j)|\}$$

Croix de Roberts

$$\begin{aligned} - D_1 &= I(i, j+1) - I(i+1, j) \\ - D_2 &= I(i, j) - I(i+1, j+1) \\ - D &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \end{aligned}$$

Opérateur MDIF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Filtrage optimal (Deriche)

Filtre de dérivation ($D(t) = -cte^{-\alpha|t|}$)

$$\begin{aligned} I^+(t) &= aI(t) - b_1I^+(t-1) - b_2I^+(t-2) \\ I^-(t) &= -aI(t+1) - b_1I^-(t+1) - b_2I^-(t+2) \\ I^D(t) &= I^-(t) + I^+(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= ce^{-\alpha} \\ b_1 &= -2e^{-\alpha} \\ b_2 &= e^{-2\alpha} \\ c &= \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}} \end{aligned}$$

Filtre de lissage ($L(t) = k(\alpha|t| + 1)e^{-\alpha|t|}$)

$$\begin{aligned} I^+(t) &= a_0I(t) + a_1I(t-1) - b_1I^+(t-1) - b_2I^+(t-2) \\ I^-(t) &= a_2I(t+1) + a_3I(t+2) - b_1I^-(t+1) - b_2I^-(t+2) \\ I^L(t) &= I^-(t) + I^+(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= k \\ a_1 &= k(\alpha - 1)e^{-\alpha} \\ a_2 &= k(\alpha + 1)e^{-\alpha} \\ a_3 &= -ke^{-2\alpha} \\ b_1 &= -2e^{-\alpha} \\ b_2 &= e^{-2\alpha} \\ k &= \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x^+(i, j) &= a_0I(i, j) + a_1I(i, j-1) - b_1I^+(i, j-1) - b_2I^+(i, j-2) \\ I_x^-(i, j) &= a_2I(i, j+1) + a_3I(i, j+2) - b_1I^-(i, j+1) - b_2I^-(i, j+2) \\ I_x^L(i, j) &= I_x^-(i, j) + I_x^+(i, j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= (I * L_y) * D_x \\ I_y &= (I * L_x) * D_y \end{aligned}$$

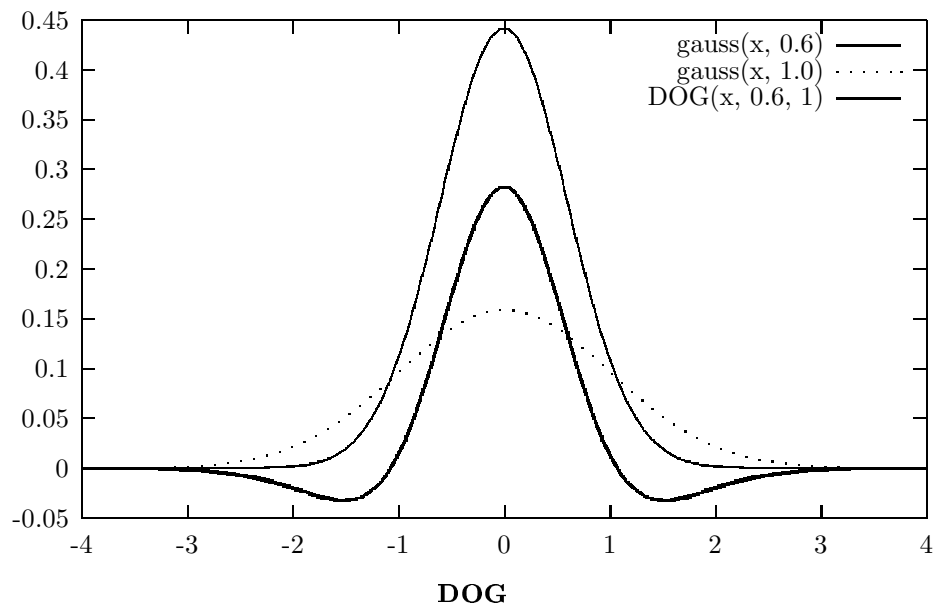
6.3 Opérateur dérivatifs du second ordre

Laplacien de gaussienne (LOG) – Marr et Hildreth

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \Delta G_\sigma \\ &= \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial y^2} \\ &= 1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Différence de gaussiennes (DOG)

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \sigma = 1 \\ g_2 &= \frac{1}{2\pi \times 0.6^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \times 0.6^2}\right) \quad \sigma = 0.6 \\ g &= g_2 - g_1 \end{aligned}$$



6.4 Extraction des contours

6.5 Gradients morphologiques

- 1) Gradient de Beucher : $\rho_B(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$
- 2) $\rho_B^+(f) = \delta_B(f) - f$
- 3) $\rho_B^-(f) = f - \varepsilon_B(f)$